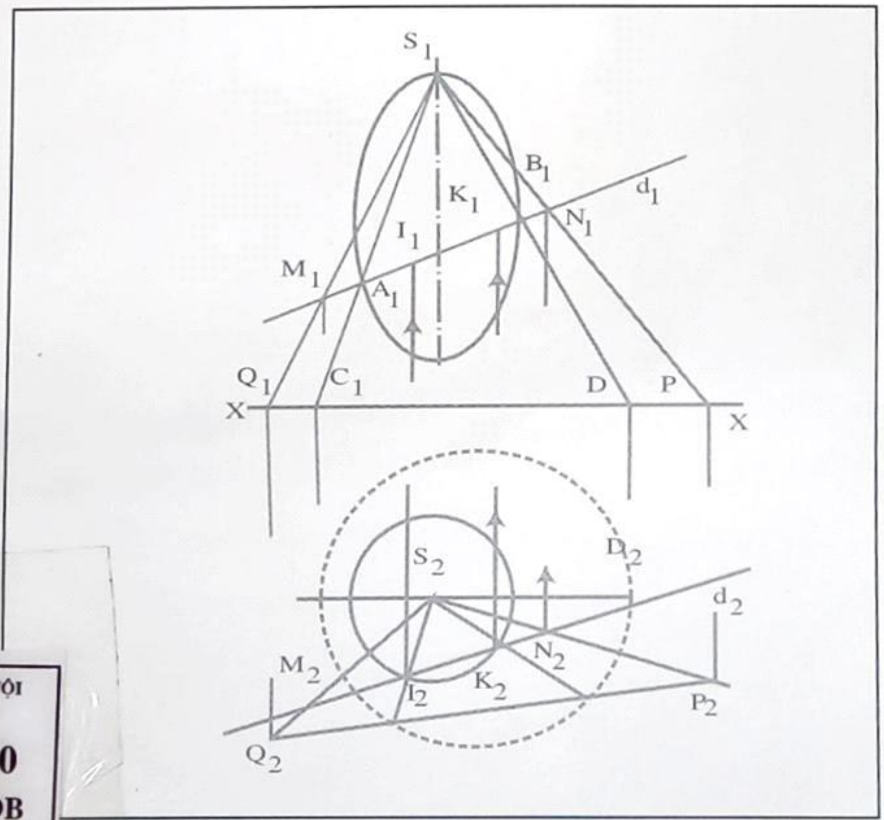
CÁCH GIẢI

Một số bài toán nâng cao trong

HÌNH HỌC HỌA HÌNH



GD

PHẠM VĂN NHUẦN

CÁCH GIẢI

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO TRONG HÌNH HỌC HỌA HÌNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Một bài toán hình học họa hình suy cho cùng là một bài toán hình học không gian được thể hiện bằng đồ họa. Trước tiên phải tìm được hướng giải bài toán không gian, vạch ra từng bước dựng hình, sau đó mới dùng phương pháp hình họa để thể hiện các bước đó trên đồ thức.

Trong cuốn sách này, tác giả xin nêu một số bài toán hình học họa hình khá hay đã sưu tầm được trong quá trình giảng dạy môn học tại trường Đại học Bách khoa Hà Nội, nhằm cung cấp tài liệu tham khảo cho các lớp bồi dưỡng sinh viên giỏi (phần đầu) và cho các lớp Cao học sau khi đã học lý thuyết về các mặt bậc hai, về các phép biến đổi hômôlogic, aphin, v.v..

Bước đầu soạn thảo một cuốn sách về loại này nên không tránh khỏi thiếu sót, tác giả rất mong sự góp ý của các độc giả.

Hà Nội, tháng 8 năm 2000

Tác giả

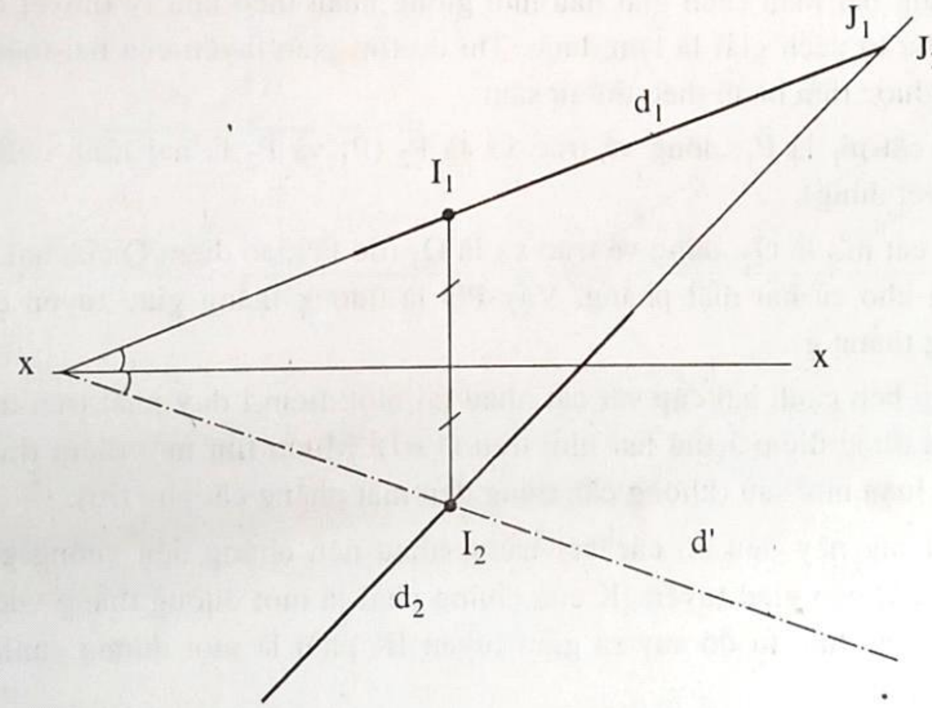
PHẦN I

MỘT VÀI NHẬN XÉT TRƯỚC KHI GIẢI TOÁN

1. Có những bài toán chỉ cần vận dụng lý thuyết đã học là suy ra kết luận được ngay.

Ta đã biết một điểm thuộc mặt phẳng phân giác một thì có hai hình chiếu đối xứng qua trục tung XX và điểm thuộc mặt phẳng phân giác hai thì có hai hình chiếu trùng nhau.

Vậy muốn tìm giao điểm I của một đường thẳng d với mặt phẳng phân giác mới thì chỉ cần dựng hình đối xứng d' của d_1 qua trục xx (hoặc d" của d_2) thì nó sẽ cắt hình chiếu d_2 tại I_2, suy ra I_1 trên d_1 và rõ ràng I_1 và I_2 đối xứng qua trục xx. Đó là giao điểm I cần tìm.

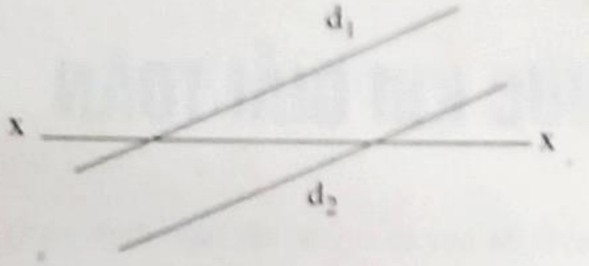


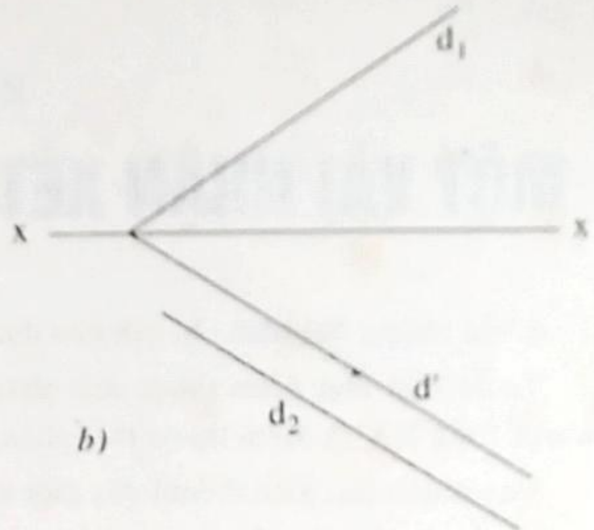
Hình 1

Hoặc muốn tìm giao điểm J của d với mặt phẳng phân giác hai thì kéo dài d_2 cho cắt d_1 tại điểm $J_1 \equiv J_2$ thì đó là hai hình chiếu của giao điểm J cần tìm.

Bây giờ ta mở rộng bài toán ra như sau: nếu đường đối xứng d' không cắt d_2 tức là d' $//d_2$ thì không tìm được giao điểm, vậy khi đó d // mặt phẳng phân giác I (hình 2b).

Nếu d_2 không cắt d_1 tức là $d_2 // d_1$ thì không tìm được giao điểm J, có nghĩa là d// mặt phẳng phân giác II (hình 2a).





Hình 2

2. Có những bài toán cách giải hầu như giống nhau theo như lý thuyết đã học. Chỉ cần nắm được thứ tự cách giải là làm được. Thí dụ tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cho bằng cặp vết sẽ được tiến hành theo thứ tự sau:

a. Cho n_1 cắt n'_1 là P_1, dóng về trục xx là P_2 (P_1 và P_2 là hai hình chiếu của giao điểm P của hai vết đứng).

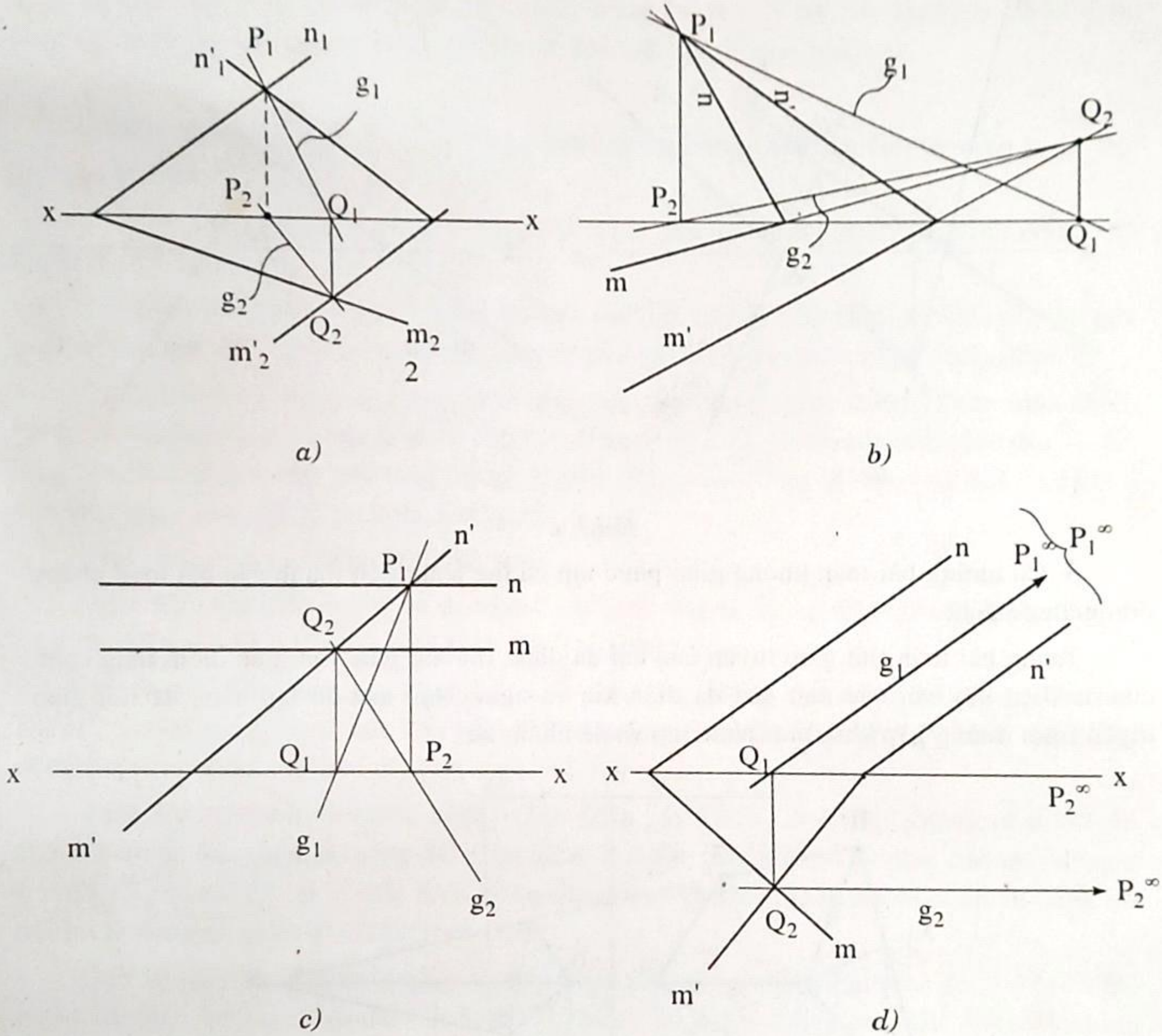
b. Cho m_2 cắt m'_2 là Q_2, dóng về trục xx là Q_1 (đó là giao điểm Q của hai vết bằng) P và Q đều chung cho cả hai mặt phẳng. Vậy PQ là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng đó (đường thẳng g).

Trường hợp bên cạnh hai cặp vết cắt nhau tại một điểm I duy nhất trên trục xx. Vậy ta không thể tìm được điểm J thứ hai như trên ($I \equiv J$). Muốn tìm một điểm thứ hai K của giao tuyến, ta lý luận như sau (không cần dùng đến mặt phẳng cắt phụ trợ).

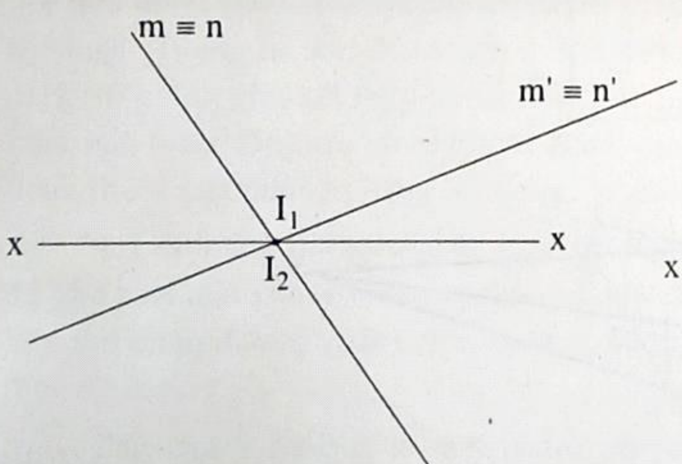
Hai mặt phẳng này đều có các vết trùng nhau nên chúng đều vuông góc với mặt phẳng phân giác hai nên giao tuyến IK của chúng phải là một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng phân giác hai, từ đó suy ra giao tuyến IK phải là một đường cạnh // với mặt phẳng phân giác một.

Nhưng I đã là một điểm thuộc mặt phẳng phân giác một nên IK là một đường cạnh thuộc mặt phẳng phân giác một. Vậy chỉ cần lấy một điểm K thuộc mặt phẳng phân giác một sao cho IK là đường cạnh thì đó là giao tuyến cần tìm.

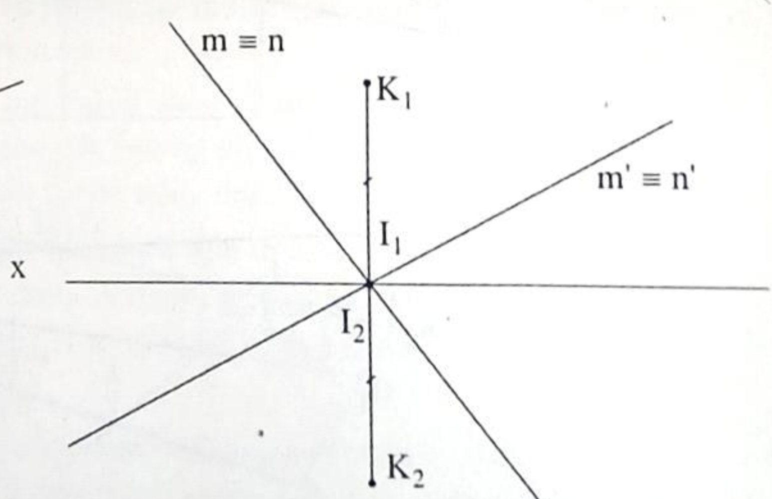
Hai trường hợp sau thì làm giống như các bước của lý thuyết ở trên một cách dễ dàng.



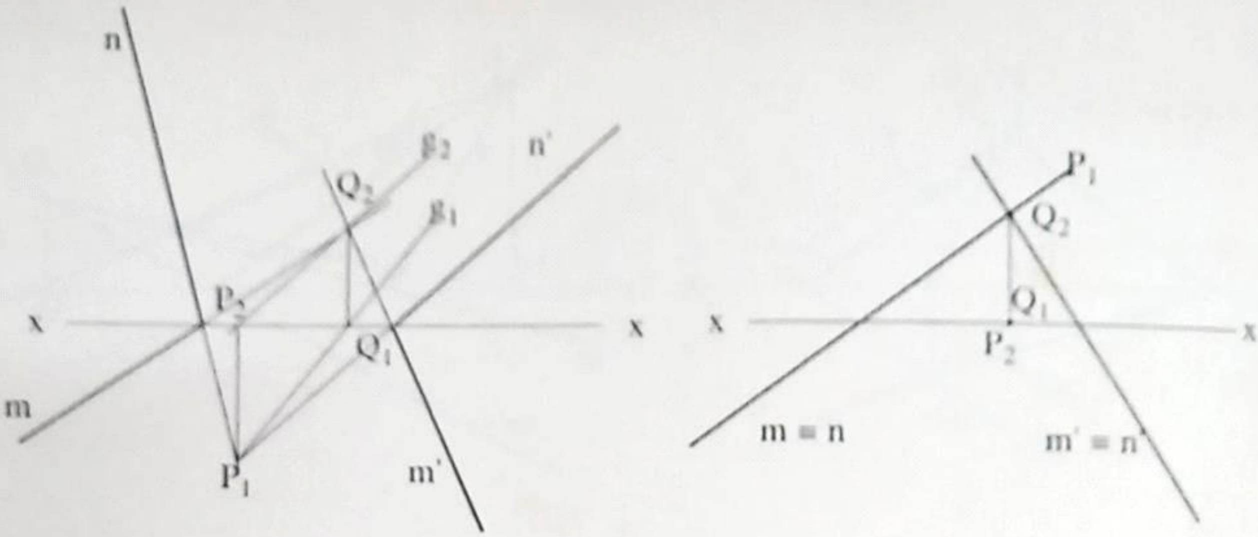
Hình 3



Hình 4



Hình 5

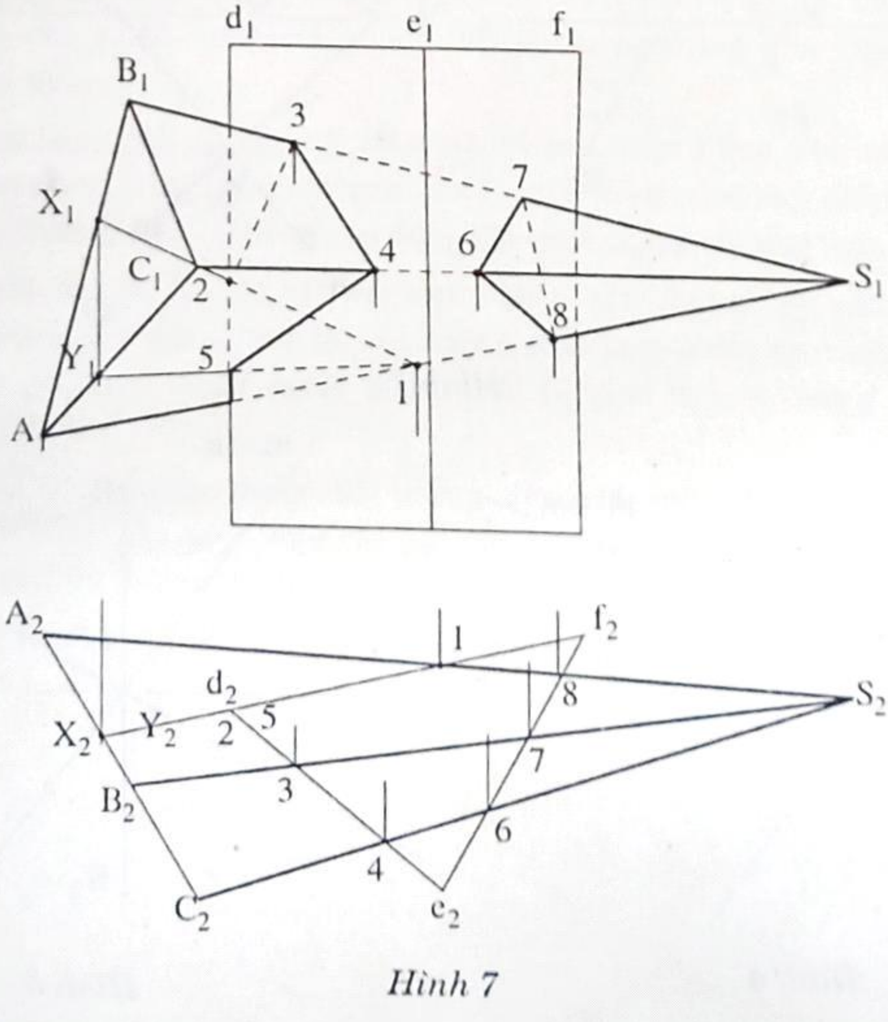


a) b)

Hình 6

3. Có những bài toán không gian phức tạp có thể phân tích thành các bài toán phẳng đơn giản để giải.

Trong bài toán tìm giao tuyến của hai đa diện, thường phải tìm giao điểm từng cạnh của đa diện này với các mặt của đa diện kia và ngược lại, sau đó lập bảng để nối giao tuyến (một đường gấp khúc) rất phức tạp và dễ nhầm lẫn.



Hình 7

Nhưng nếu là trường hợp đặc biệt (một trong hai mặt là trụ hay lăng trụ chiếu đứng hoặc chiếu bằng) thì ta có thể đưa về các bài toán phẳng để giải như sau:

Nhận xét:

1. Một trong hai mặt là chiếu đứng hoặc chiếu bằng (hình chiếu suy biến sẽ là một đường khép kín).

2. Hình chiếu đã biết của giao tuyến là phần chung của hai mặt trên hình chiếu suy biến (phần tô đậm).

3. Gắn các điểm của giao tuyến vào mặt thứ hai thì ta có được hình chiếu còn lại của giao tuyến. Thí dụ tìm giao tuyến của chóp SABC với lăng trụ chiếu bằng (def) (hình 7).

Lăng trụ chiếu bằng có hình chiếu bằng suy biến là tam giác $d_2e_2f_2$. Phần hình chiếu bằng đã biết của giao tuyến là phần chung (tô đậm) trên các cạnh của tam giác $d_2e_2f_2$. Rõ ràng SA cắt các mặt bên của lăng trụ tại 1 và 8, SB tại 3 và 7 và SC tại 4 và 6. Còn cạnh d của lăng trụ cắt mặt SBC tại 2 và SAC tại 5.

Hai cạnh e và f không cắt hình chóp.

Mặt SBC chứa đoạn 3-4 và đoạn 6-7 của giao tuyến. Để có hình chiếu đứng dóng 3 và 7 lên SB và 4 và 6 lên SC. Nối 3-4 và 6-7 là xong.

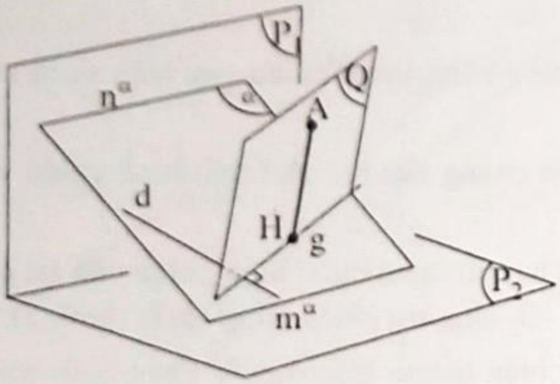
Mặt SAB chứa đoạn gẫy khúc 1-2-3 và đoạn 7-8. Dóng 1 và 8 lên SA, 3 và 7 lên SB. Điểm 2 không thuộc cạnh nào của ΔSAB, nếu ta gắn điểm 2 vào đoạn 1 - X của ΔSAB thì dóng lên ta có điểm hai trên d1. Nối 1-2-3 và 7-8.

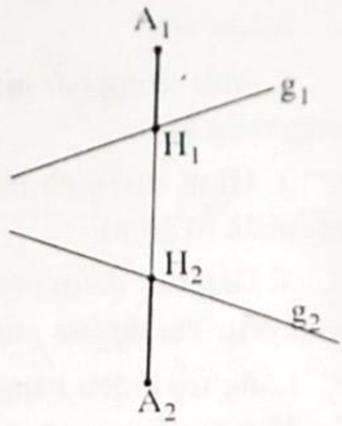
Mặt SAC (xem hình chiếu bằng) chứa đoạn gẫy khúc 1-5-4 (chứ không phải 1-2-4). Điểm 1 thuộc SA, điểm 4 thuộc SC. Còn điểm 5 thuộc mặt SAC. Vậy phải gác một đoạn 1 - Y thì $1Y_1$ sẽ cắt d1 tại 5. Mặt SAC còn chứa đoạn 6-8 nữa. Dóng lên hình chiếu đứng rồi nối lại là xong cả phần giao tuyến cần tìm.

Xét về thấy và khuất của giao tuyến: đoạn nào của giao tuyến thuộc đồng thời cả hai mặt thấy theo hướng chiếu đó mới là thấy. Thí dụ đoạn 3-4 thuộc mặt SBC thấy trên hình chiếu đứng và thuộc mặt de cũng thấy trên hình chiếu đứng. Tương tự các đoạn 4-5, 7-6 và 6-8 đều thấy. Đoạn 7-8 tuy thuộc mặt ef thấy nhưng lại thuộc mặt SAB khuất nên 7-8 vẫn là khuất. Tương tự, các đoạn 1-2, 2-3, 5-1 đều khuất. Còn xét thấy khuất các cạnh của đa diện thì giống như xét thấy khuất của 2 đường thẳng chéo nhau. Các đoạn 3-7, 4-6 và 1-8 nằm bên trong lăng trụ tất nhiên là khuất theo các hướng chiếu. Như ta thấy nối xong các đoạn thuộc các miếng phẳng SAB, v.v. là giao tuyến cũng đồng thời được nối xong vậy.

4. Có những bài toán phải dùng tên khái niệm quĩ tích để xác định điểm cần tìm. Thí dụ cho một mặt phẳng chiếu cạnh α và một điểm A ngoài α. Không dùng hình chiếu khác, hãy tìm chân đường vuông góc hạ từ A xuống H thuộc mặt phẳng α trực tiếp ngay trên đồ thức đã cho.

Cần chú ý rằng α là mặt phẳng chiếu cạnh thì đường vuông góc AH ⊥α phải là đường cạnh nên chân đường vuông góc H có hai hình chiếu H_1 và H_2 thuộc đường dóng qua A_1 và A_2. Ngoài ra nếu A lập một mặt phẳng Q ⊥ α (bằng cách kẻ một đường thẳng d thuộc α, rồi lập mặt phẳng Q qua A và ⊥ d (tức là ⊥ α), mặt phẳng Q sẽ cắt α theo giao tuyến g thì g_1 cắt đường dóng A_1A_2 tại H_1 và g_2 cắt A_1A_2 tại H_2 là hai hình chiếu của chân đường vuông góc H.





Hình 8

Ở giai đoạn cuối ta có hình như trên đây. Bài toán đã được giải trực tiếp trên đầu bài mà không cần thay mặt phẳng hình chiếu.

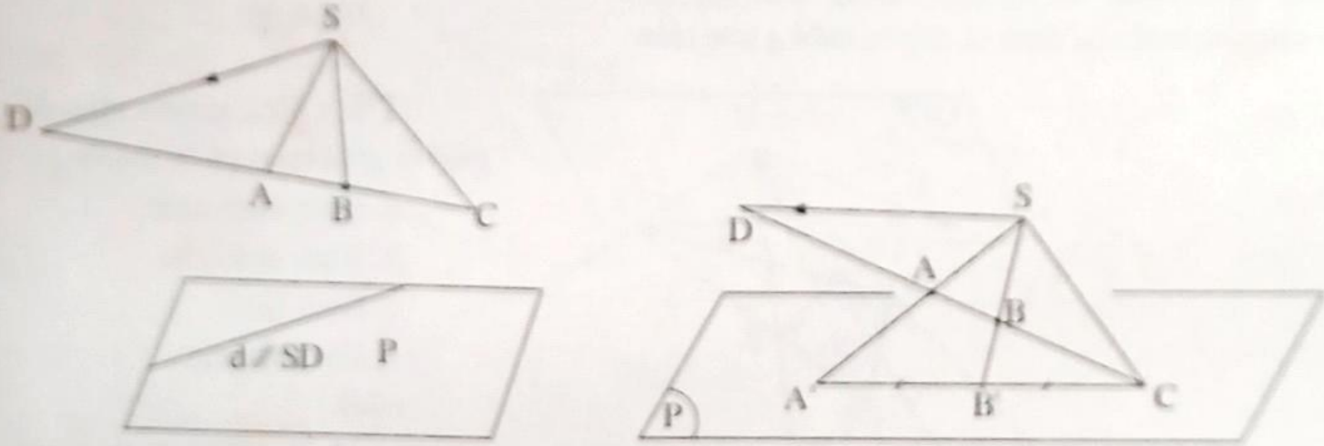
PHẦN II

TOÁN VỀ PHÉP CHIẾU XUYÊN TÂM

T1. Cho ba điểm thẳng hàng A, B và C và một điểm S ngoài đường ABC, tìm mặt phẳng hình chiếu P để khi chiếu xuyên tâm từ S xuống P thì hình chiếu của B thành trung điểm của hình chiếu đoạn AC.

Giải

Tìm điểm D liên hiệp điều hòa của B qua A và C. Nối SD, mặt phẳng P phải chọn sao cho P //SD, khi đó hình chiếu của D ra vô tận nên hình chiếu B' sẽ thành trung điểm của A'C'. Có nhiều mặt phẳng P thỏa mãn điều kiện đó.

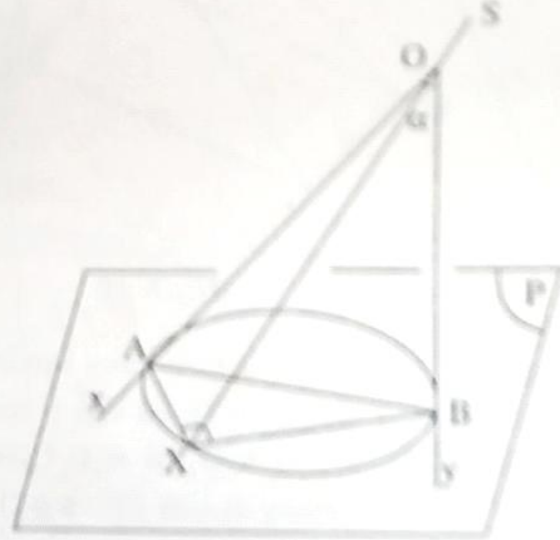


Hình 9

T2. Cho hai nửa đường thẳng Ox và Oy làm với nhau một góc bất kỳ α. Tìm tâm chiếu S để hình chiếu xuyên tâm của chúng lên một mặt phẳng P cho trước thành hai đường thẳng vuông góc nhau. Số nghiệm?

Giải

Mặt phẳng P cắt Ox tại A và Oy tại B. Trên P vẽ một đường tròn đường kính là AB. X là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Nối XO. Nếu lấy một điểm bất kỳ trên XO làm tâm chiếu S thì Ox tức OA chiếu thành XA, còn Oy tức OB chiếu thành XB. Rõ ràng XA ⊥ XB. Vì X là một điểm bất kỳ trên đường tròn nên quĩ tích của S là mặt nón đỉnh O có đường chuẩn là đường tròn đường kính AB trên P.



Hình 10

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung :

NGUYỄN VĂN MẬU

CÁCH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO TRONG HÌNH HỌC HOẠ HÌNH

In 1000 bản, khổ 19x26,5 cm, tại nhà in Báo Người Hà Nội. Giấy phép xuất bản số : 302/CXB-86 của Cục xuất bản cấp ngày 20 - 3 - 2002

In xong và nộp lưu chiểu quý I - 2003